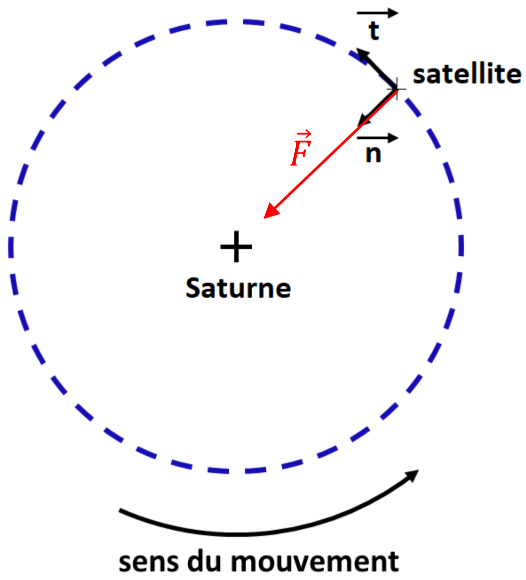
Correction

EXERCICE 1 : Autour de Saturne (9.5 points)

1. Représenter la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par Saturne sur le satellite sans souci d'échelle sur le document ci-dessus



2. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle exercée par Saturne sur le satellite en fonction des données dans le repère de Frenet.

$$\vec{F} = G \times \frac{M_S \times m_{sat}}{r^2} \times \vec{n}$$

3. En appliquant la deuxième loi de Newton, retrouver l'expression de la vitesse *v* du satellite.

Système : {Satellite} de masse m_{sat}.
Référentiel : saturnocentrique considéré galiléen.
Inventaire des forces : uniquement la force d'attraction gravitationnelle exercée par Saturne sur le satellite : $\vec{F}$
La 2ème loi de Newton (ou le principe fondamental de la dynamique)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{sat} \times \vec{a}(t)$$

$$\vec{F} = G \times \frac{M_S \times m_{sat}}{r^2} \times \vec{n} = m_{sat} \times \vec{a}(t)$$

$$\vec{a}(t) = G \times \frac{M_S}{r^2} \times \vec{n}$$

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \times \vec{t} + \frac{v^2}{r} \times \vec{n}$.

En comparant deux expressions de $\vec{a}$, on en déduit que :

$$on\ a\ montré\ que \qquad \vec{a} = 0 \times \vec{t} + \frac{G \times M_S}{r} \times \vec{n}$$

Cela signifie que la coordonnée suivant $\vec{t}$ est nulle, soit $\frac{dv}{dt} = 0$ et donc que la vitesse est constante.

A partir des 2 expressions de l'accélération, on en déduit :

$$\frac{G \times M_S}{r} = \frac{v^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r}}$$

4. Montrer que l'expression de la vitesse du satellite permet de retrouver la 3e loi de Kepler qui relire la période T du satellite au rayon r de son orbite :

$$T^2 = k \times r^3 \quad avec\ k = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$v = \frac{2\pi \times r}{T} \qquad soit \qquad T = \frac{2\pi \times r}{v} = 2\pi \times r \times \sqrt{\frac{r}{G \times M_S}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M_S}}$$

$$soit \qquad T^2 = 4\pi^2 \times \frac{r^3}{G \times M_S} = k \times r^3 \qquad avec \quad k = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

5. Déterminer la masse de Saturne sachant que la période de révolution de Janus est de 17 h.

Pour Janus :

$$T_J^2 = 4\pi^2 \times \frac{R_J^3}{G \times M_S} \qquad soit \qquad \boldsymbol{M_S = \frac{4\pi^2 \times R_J^3}{G \times T_J^2}}$$

avec T_J = 17 h = 17 × 3600 s et R_J = 1,51×10^5 km = 1,51×10^8 m.

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times \left(1{,}51 \times 10^8\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (17 \times 3600)^2}$$ **= 5,4 × 10^{26} kg**.

6. Justifier qualitativement que tous les corps du premier anneau ne tournent pas à la vitesse autour de Saturne.

La vitesse v d'un satellite dépend de sa distance r au centre de Saturne : $v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r}}$.

Les corps du premier anneau ont un rayon r qui varie entre r_{int} et r_{ext}.

Ils ont donc des vitesses différentes ($v_{int} > v_{ext}$) et ne tournent donc pas à la même vitesse autour de Saturne.

7. Déterminer le nombre de tours effectués par la bordure interne du premier anneau, située à la distance r_{int}, pendant que la bordure externe du dernier anneau, située à R_{ext}, réalise un tour complet.

D'après la 3ème loi de Kepler, on peut écrire :

$$\frac{T_{ext}^2}{r_{ext}^3} = \frac{T_{int}^2}{r_{int}^3} = k$$

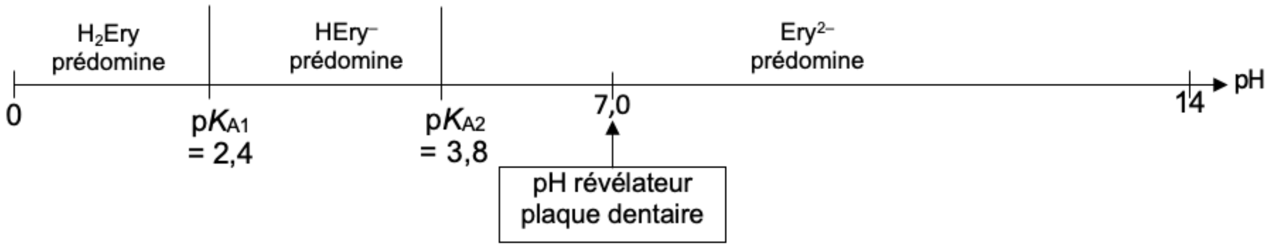
$$on\ peut\ donc\ écrire : \qquad \frac{T_{ext}^2}{T_{int}^2} = \frac{r_{ext}^3}{r_{int}^3} = 2{,}9$$

La période de révolution d'un corps sur le rayon extérieur du dernier anneau est environ égale à trois fois celle d'un corps sur le rayon intérieur du premier anneau.

Ainsi la bordure interne du premier anneau effectue environ 3 tours pendant que la bordure externe du dernier anneau réalise un tour complet.

EXERCICE 2 : Colorant E127 (8.5 points)

1. Identifier, en justifiant, la forme de l'érythrosine qui prédomine dans le révélateur de plaque dentaire étudié.



Dans le révélateur de plaque dentaire, la forme Ery^{2-} prédomine car p*H* > pK_{A2}

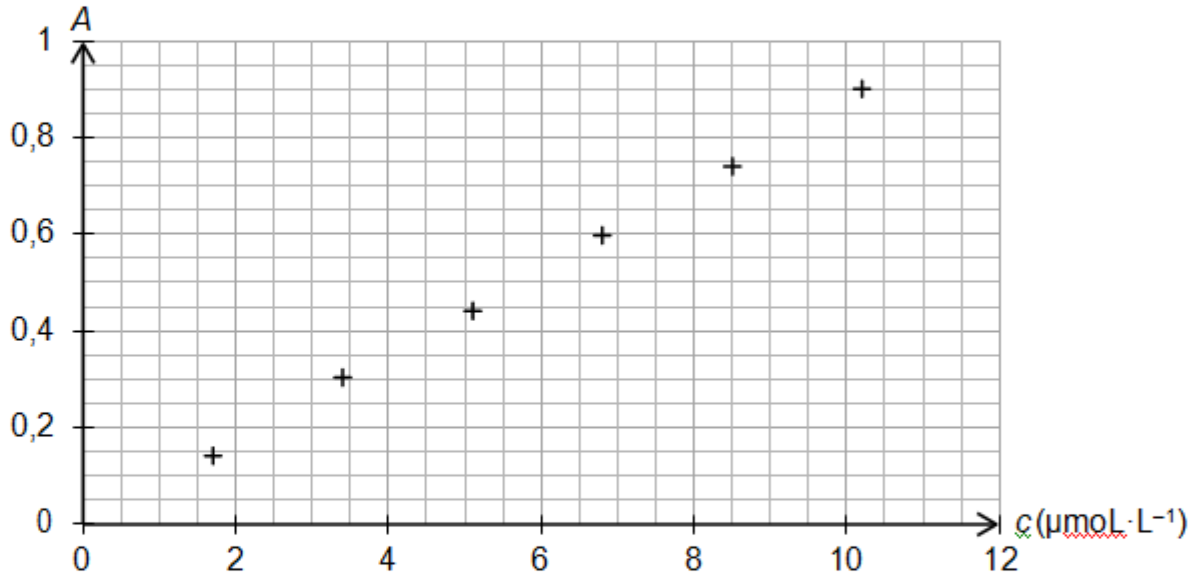
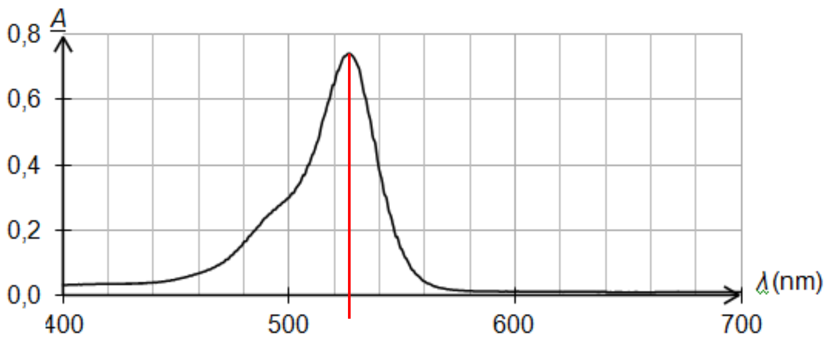


Figure 1. Évolution de l'absorbance en fonction de la concentration en quantité de matière de colorant E127 apporté

2. Justifier la couleur du révélateur de plaque dentaire étudié.



Le spectre d'absorption du colorant E127 présente un maximum d'absorption autour de λ = 530 nm soit le vert d'après le cercle chromatique.

La couleur de la solution du révélateur de plaque dentaire est la couleur complémentaire au vert, diamétralement opposée au vert sur le cercle chromatique, soit le rouge.

3. Discuter de l'accord des résultats expérimentaux avec la loi de Beer-Lambert.

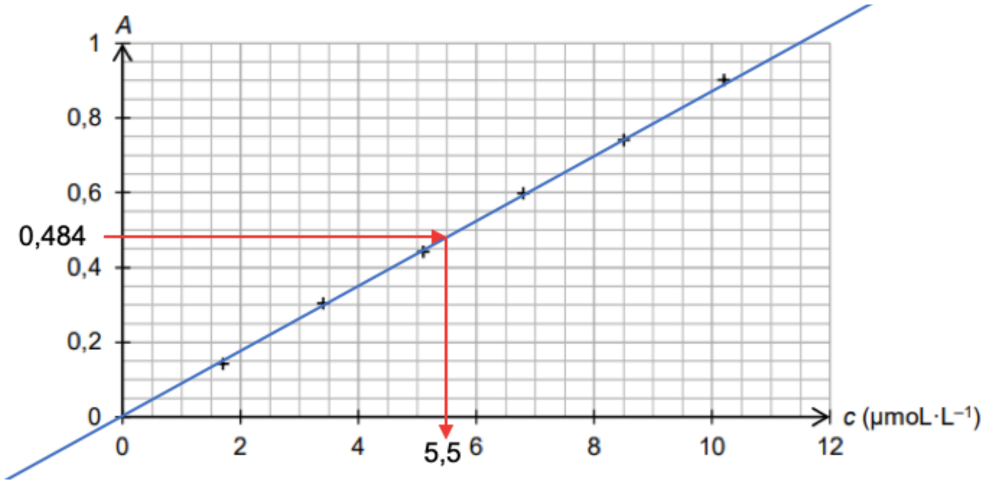
D'après la loi de Beer-Lambert, l'absorbance (A) d'une solution colorée est proportionnelle à sa concentration (C) :

$$A = k \times C$$

La figure 1 montre une évolution linéaire de l'absorbance en fonction de la concentration.

On a donc proportionnalité entre A et C avec comme coefficient de proportionnalité le coefficient directeur de la droite.

4. Montrer que la concentration du colorant E127 apporté dans le révélateur de plaque dentaire est égale à $2,2 \times 10^{-2}$ mol·L^{-1}.



La concentration de la solution diluée est : c_S = 5,5 µmol.L^{-1}

Le facteur de dilution est : $f = \frac{V_S}{V_0} = \frac{2,0}{5.10^{-4}} = 400$

La concentration du colorant est donc : $c_0 = 400 \times 5,5 \times 10^{-6} = 2,2 \times 10^{-2}$ mol·L^{-1}

5. Déterminer la valeur du titre massique en colorant E127 du révélateur de plaque dentaire analysé. Commenter.

Le titre massique en colorant E127 est le pourcentage en masse du colorant, soit :

$$w(E127) = \frac{m(E127)}{m(solution)}$$

avec *m*(E127) la masse de colorant E127 dans V_{sol} = 2,0 L de solution et *m*(solution) masse de V_{sol} = 2,0 L de la solution.

$$w(E127) = \frac{n(E127) \times M(E127)}{\rho \times V_{sol}} = \frac{c_0 \times V_{sol} \times M(E127)}{\rho \times V_{sol}} = \frac{c_0 \times M(E127)}{\rho}$$

$$w(E127) = \frac{2,2 \times 10^{-2} \times 880}{1,0 \times 10^3} = 0,019 \qquad soit \qquad 1,9\%$$

On retrouve une valeur proche des 2 % annoncés.